

Laboratoriearbeid

PHYS111 – Mekanikk

Lab 3: Rulling – akselerasjon på skråplan

Utført dato: 03. november 2005

Rapport fra:
Erik Grindheim

Gruppe nr. 4-5:
Mads Christensen
Erik Grindheim

Rulling – akselerasjon på skråplan

Laboratoriekurs i fysikk, PHYS111 – øvelse nr. 3

Rapport fra: **Erik Grindheim**
Gruppe: 4-5 (Mads C. & Erik G.)
Dato forsøk: 03. november 2005

Innledning

I dette forsøket skal vi gjøre indirekte målinger av akselerasjonen til legemer som ruller nedover et skråplan og sammenligne med gjeldende teori for slike forsøk. Legemene er fire ulike sylindere med kjente dimensjoner.

Utstyr

Sylinderskall av stål, hel stålsylinder, hul stålsylinder, hel aluminiumsylander, skråplan med tidtaksutstyr, linjal, skyvelære og Casio –kalkulator.

Måleresultater

Alle tidsmålinger fra laboratoriet er gitt i vedlegget bakerst. Det blir gjort fem tidtakinger for hver av sylindrene, på hvor lang tid de bruker på å rulle 999 mm nedover skråplanet. Vi tilstreber en starthastighet $v_0 \approx 0$ for alle målingene, og regner kun på gjennomsnittstidene av de fem enkeltmålingene. Tidene er i størrelsesorden $2 \sim 2\frac{1}{2}$ sekund.

De fysiske målene på skråplanet (se vedlegget) gir oss hellingsvinkelen θ , under forutsetning av at underlaget er perfekt horisontalt:

$$\sin(\theta) = \frac{150\text{mm} - 61\text{mm}}{1221\text{mm}} = \frac{89}{1221} \Rightarrow \theta \approx 4,18^\circ$$

Alle stålsylindrene har samme ytterdiameter på 40,0 mm, mens aluminiumsylander er bitte litt tykkere med ytterdiameter på 40,3 mm. Stålsylinderen som er hul inni har innerdiameter på 20,2 mm og det tynne ”sylinderskallet” har innerdiameter på 35,1 mm slik at all massen tilnærmet ligger i samme avstand fra rotasjonsaksen ved rulling.

Teori

Læreboken vår, *Generell fysikk for universiteter og høyskoler, bind 1* omtaler relevant teori for dette eksperimentet i blant annet kapittel 6.3 og 6.7.

Treghetsmomentet for et legeme som roterer om en akse er definert som summen av $r^2 \times \Delta m$ for alle små partikler i legemet. Partiklenes avstand til aksene kalles r , og massen kalles Δm . Som vanlig i fysikken må vi for å få dette helt riktig dele opp legemene i infinitesimalt små deler, hver med masse dm , og først nå er partiklenes utstrekning (diameter) ≈ 0 slik at avstanden r er fra rotasjonsaksen til et virkelig punkt i rommet.

Summeringen går over til integrasjon, og treghetsmomentet I om rotasjonsaksen z defineres slik:

$$I_z = \int r^2 dm \approx \sum r^2 \cdot \Delta m$$

Dersom legemet har homogen tetthet er forholdet mellom masse og volum konstant:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \implies I_z = \int r^2 dm = \rho \cdot \int r^2 dV$$

Konstanten ρ er materialets densitet. For en sylinder med ytter- og innerdiameter r_y og r_i , lengde L , og tverrsnittsareal A , finner man at treghetsmomentet er:

$$\begin{aligned} I_z &= \rho \cdot \int r^2 dV = L \cdot \rho \cdot \int r^2 dA = L \cdot \rho \cdot \int_{r_i}^{r_y} r^2 \cdot (2\pi \cdot r) \cdot dr = 2\pi \cdot L \cdot \rho \cdot \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r_i}^{r_y} = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot L \cdot \rho \cdot (r_y^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2} \cdot L \cdot \frac{m}{V} \cdot (r_y^4 - r_i^4) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{A} \cdot (r_y^4 - r_i^4) = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{m}{\pi \cdot (r_y^2 - r_i^2)} \cdot (r_y^4 - r_i^4) = \frac{m}{2} \cdot (r_y^2 + r_i^2) \end{aligned}$$

Hvis vi har en sylinder med en bestemt masse, så er treghetsmomentet om aksene størst jo større vi gjør ytter- og innerdiameteren. Hvis ytterdiameteren $r_y = R$ og innerdiameteren varierer så ser vi at det er to ytterpunkt:

- $I_{\text{homogen}} = \frac{1}{2} \times m \times R^2$, $r_i = 0$ Tett sylinder (homogen)
- $I_{\text{maksimal}} = m \times R^2$, $r_i = R$ Sylinderskall (all masse samlet i skallet)

Altså er treghetsmomentet for en sylinder mellom 50 og 100 % av $m \times R^2$, avhengig av hvor stor innerdiameteren er. Faktoren k som angir dette blir:

$$k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (r_i/R)^2$$

Når en sylinder ruller nedover skråplanet påvirkes den kun av tre krefter: Normalkraften fra underlaget, friksjonen F_R og tyngden G . Førstnevnte kraft virker vinkelrett på bevegelsesretningen og tvers gjennom sylinderens massesenter. Dermed påvirker den ikke den translatoriske bevegelsen langs planet, og den påvirker ikke rotasjonsbevegelsen da dreiemomentet er lik null. Friksjonen virker langs planet, og påvirker rotasjonen med et dreiemoment $\tau = R \times F_R$, samt at den bremser den translatoriske bevegelsen nedover. Tyngden virker gjennom massesenteret, og kan dekomponeres i en uvirksom kraft vinkelrett på underlaget, og en kraft langs planet. Det er denne parallelle komponenten av tyngdekraften som forårsaker translatorisk bevegelse nedover skråplanet: $G_p = m \times g \times \sin(\theta)$

$$F_R = \tau/R = I \times a/R \quad m \times a = m \times g \times \sin(\theta) - F_R \quad a = a/R \quad I = k \times m \times R^2$$

$$\implies m \times a = m \times g \times \sin(\theta) - I \times a/R^2 = m \times g \times \sin(\theta) - k \times m \times a$$

$$\implies a = g \times \sin(\theta) - k \times a \quad (\text{Massen divideres bort!})$$

$$\implies a = g \times \sin(\theta) / (1 + k)$$

Vi har altså konstant akselerasjon, og uten startfart ($v_0 = 0$) blir sammenhengen mellom strekning s langs planet og tiden t slik:

$$s = \frac{1}{2} \times a \times t^2 \implies t = \sqrt{\frac{2 \cdot s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot s \cdot (1+k)}{g \cdot \sin(\theta)}} \implies 2048\text{ms} \leq t \leq 2364\text{ms}$$

Intervall for tiden t ovenfor beregnes med de reelle verdiene for g , θ og s , mens k er mellom $\frac{1}{2}$ og 1. Vi undersøker om vi kan bekrefte denne teorien med våre forsøk og beregninger av k .

Gjennomføring og beregninger

Tabellen nedenfor viser hvordan våre resultater blir seende ut:

Rullelegeme	$2 \times r_y = 2 \times R$	$2 \times r_i$	k	t (beregnet)	a (beregnet)	t (målt)	a (målt)
Aluminium, massiv	40,3 mm	0	0,5	2,048 s	$0,4765 \text{ m/s}^2$	2,12 s	$0,444 \text{ m/s}^2$
Stål, massiv	40,0 mm	0	0,5	2,048 s	$0,4765 \text{ m/s}^2$	2,12 s	$0,446 \text{ m/s}^2$
Stål, hul	40,0 mm	20,0 mm	0,625	2,131 s	$0,4399 \text{ m/s}^2$	2,23 s	$0,402 \text{ m/s}^2$
Stål, skall	40,0 mm	35,1 mm	0,885	2,295 s	$0,3792 \text{ m/s}^2$	2,35 s	$0,361 \text{ m/s}^2$

Det kan se ut som om legemene våre akselererer ruller bitte litt (ca 5%) tregere enn teorien tilsier. Litt eksperimentering med den numeriske solver'en på Casio –kalkulatoren viser at feilen kan skrive seg fra at underlaget for skråplanet vårt ikke er i water. Dersom pulten vi brukte danner en vinkel på $\frac{1}{4}$ grad med horisontalen så kan dette forklare avviket. Men avviket kan like gjerne komme av rullefriksjon pga ujevnheter i rulleplanet eller lignende.

Konklusjon

Vi ser at de legemene som har massen lengst bort fra rotasjonsaksen (hule sylindere, eller helst sylinderskall) har større treghetsmoment og derfor får en lavere akselerasjon enn legemer med massen lokalisert nært rotasjonsaksen. Dette stemmer bra med definisjonen av treghetsmomentet for små massepartikler om en akse, som sier at $dI = r^2 \times dm$.

Formlene for å regne ut akselerasjonen (eller tiden det tar å rulle over skråplanet) stemmer innenfor en feilmargen som vi må godta så lenge vi ikke vet i hvilken grad underlaget vårt er helt horisontalt. Disse formelene inneholder ikke massen til legemene, bare konstanten k som avhenger av *formen* (yttre og indre diametre) på legemet (forutsetter homogen masse, samme densitet i materialet).

Det at massen ikke inngår i uttrykkene er like naturlig som at massen ikke inngår i uttrykket for den translatoriske akselerasjonen ved konstant kraftsum på et legeme uten rotasjon. Når et legeme ruller på skråplanet kan dette beskrives som superposisjonen av to samtidige bevegelser: En forskyvning (translasjon) og en rotasjon. Men rotasjonen er egentlig bare en sum (integral) av infinitesimale masser som akselereres på "vanlig måte" med Newton's 2. lov: $dF = a \times dm$. Hvis vi multipliserer denne ligningen med r , som er avstanden fra partikkel til rotasjonsakse, så får vi nemlig den kjemte ligningen for rotasjon: $d\tau = a \times r \times r \times dm = a \times dI$.

Vi kan også alternativt gjøre energibetraktninger for å vise at all potensiell energi som forsvinner i høydetapet går over til kinetisk energi, i rotasjons- og translasjonsbevegelsen til legemet. Ingen energi går tapt.