

Funksjoner

1. Elementære funksjoner:

- a) $\ln y = x \Leftrightarrow y = e^x$ $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$
- b) $\ln(AB) = \ln A + \ln B$, $\ln \frac{A}{B} = \ln A - \ln B$ $\ln A^u = u \ln A$
- c) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\cot x = \frac{1}{\tan x}$
- c) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$, $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- d) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
- e) $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$
- f) $\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v))$
- g) $\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u+v) + \sin(u-v))$ $\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$
- h) $A \sin x \pm B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x \pm \phi)$ der $A > 0, B > 0, \tan \phi = \frac{B}{A}$ og $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

2. Derivasjon og integrasjon:

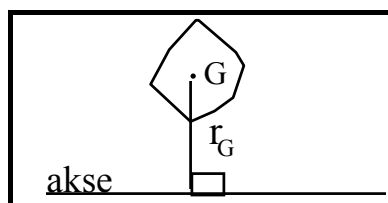
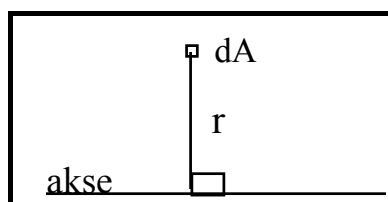
- a) $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}$ der $u = g(x)$ (kjerneregel)
- b) $\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$ der $y = f^{-1}(x)$ (Regel for derivert av invers funksjon)
- c) $\frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t) dt = f(u) \frac{du}{dx}$ (a er en konstant) $\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v) \frac{dv}{dx} - f(u) \frac{du}{dx}$
- d) $\int (g(x) + h(x)) dx = \int g(x) dx + \int h(x) dx$
- e) $\int k g(x) dx = k \int g(x) dx$ (k er en konstant)
- f) $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$ der $u = g(x)$ og $du = g'(x) dx$
- g) $\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int v(x) u'(x) dx$

h)

$f(x)$	$f'(x)$
x^r	rx^{r-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x = \frac{1}{\tan x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n når $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^x	$e^x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C = -\frac{1}{\tan x} + C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$
$\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$
$\tan^2 x$	$\tan x - x + C$

3. Moment og tyngdepunkt:



Statisk moment av flateelement med hensyn på akse: $dM = r dA$

Tregghetsmoment av flateelement med hensyn på akse: $dI = r^2 dA$

For kurveelement

$$ds: \quad dM = r ds, \quad dI = r^2 ds$$

Statisk moment av flatestykke med hensyn på akse:

$$M = r_G \cdot A \quad \text{der } G \text{ er tyngdepunktet og } A \text{ arealet av flatestykket}$$

For kurvestykke: $M = r_G \cdot s$ der G er tyngdepunktet og s er lengden av kurvestykket.

4. Numeriske metoder

a) Rektangel- (midtpunkt-) formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \dots + y_n), \quad y_k = f(a + (2k-1)\frac{b-a}{2n})$$

b) Trapezformelen:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_n + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}), \quad y_k = f(a + k\frac{b-a}{n})$$

c) Simpsons formel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n}), \quad y_k = f(a + k\frac{b-a}{2n})$$

d) Newtons metode:

Velg x_1 slik at $f(x_1) \approx 0$ La $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$

Hvis $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ så er $f(a) = 0$

e) Eulers metode for løsning av differensialligningen $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$:

$$x_0 = a, \quad y_0 = b \quad \text{og} \quad x_n = x_{n-1} + h, \quad y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Differensiallikninger av 2. orden

Differensiallikningen $ay'' + by' + cy = 0$, der a, b og c er konstanter og $a \neq 0$, har den generelle løsningen

a) $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ hvis $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ har to ulike reelle røtter r_1 og r_2

b) $y = (C_1 + C_2 x)e^{rx}$ hvis $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ har dobbelroten r

c) $y = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ hvis $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ har komplekse røtter $\alpha \pm i\beta$

6. Komplekse tall:

a) Normal-form: $z = x + iy$. Her er
 $x = \operatorname{Re}(z)$ (realdelen) og $y = \operatorname{Im}(z)$ (imaginærdelen)

b) $\bar{z} = x - iy$ (konjugert), $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (modul)

c) Avstanden fra z_1 til z_2 : $|z_2 - z_1|$

d) Polar / Eksponensiell form: $z = re^{i\theta}$ der $r = |z|$ og $\theta = \arg z$

e) Eulers formel: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

f) De Moivres formel: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

Lineær algebra

1. Vektorregning

- a) Skalarprodukt mellom vektorene $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ og $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$$

der θ er vinkelen mellom vektorene ($0 \leq \theta \leq \pi$)

- b) Vektorprodukt mellom vektorene $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ og $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{med lengde} \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$$

- c) Prosjeksjonen av en vektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ på vektoren $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$

$$\text{er gitt ved } \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \right) \mathbf{b}$$

2. Linjer og plan i rommet

Koordinater til et punkt $P(x, y, z)$ på en **rett linje** med **retningsvektor**

$\vec{r} = [a, b, c]^T$ som går gjennom punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ er gitt ved

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + \vec{P_0P} = \vec{OP}_0 + t \vec{r}, \text{ det vil si}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Et **plan** som går gjennom punktet $P(x_0, y_0, z_0)$ og har normalvektor $\vec{n} = [A, B, C]$

vil gå gjennom pnktet $P(x, y, z)$ dersom $\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

Planets likning er altså $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

3. Avstandsformler

- a) Avstand fra punkt (x_0, y_0, z_0) i rommet til plan $Ax + By + Cz = D$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- b) Avstand fra punkt P i rommet til linje gjennom punkt P_0 med retningsvektor \mathbf{v}

$$d = \frac{|\mathbf{v} \times \vec{P_0P}|}{|\mathbf{v}|}$$

4. Matrisemultiplikasjon

$\mathbf{A} = [a_{ij}]$ $m \times p$ - matrise og $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ $p \times n$ - matrise.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = [c_{ij}] \text{ der } c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

5. Regneregler for matriser

\mathbf{A} og \mathbf{B} er matriser, k og p er reelle (eller komplekse) konstanter

- a) $(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$ Skrives $k\mathbf{AB}$
- b) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ Skrives \mathbf{ABC}
- c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- d) $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$
- e) $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$
- f) $(k+p)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + p\mathbf{A}$
- g) $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$
- h) Merk at for matrisemultiplikasjon gjelder ikke den kommutative lov.
altså $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gjelder **ikke** generelt.
- i) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- j) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
- k) $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

6. Invers matrise (kofaktorform)

Anta \mathbf{A} er en ikke-singulær $n \times n$ -matrise.

$$\text{Da er } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \text{ der } C_{jk} \text{ er kofaktoren til } a_{jk} \text{ i } \mathbf{A}.$$

7. Egenverdier, egenvektorer

Anta at \mathbf{A} er en vilkårlig $n \times n$ - matrise.

Dersom en vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tilfredsstiller likningen $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, er λ en **egenverdi** til \mathbf{A} og \mathbf{x} en tilhørende **egenvektor**. Egenverdier finnes av likningen

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

8. Diagonalisering

Når \mathbf{A} har n lineært uavhengige egenvektorer finnes en ikke- singulær matrise \mathbf{X} slik at $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{D}$ er en diagonalmatrise med egenverdiene på diagonalen.

9. Cayley-Hamilton setningen

Hvis \mathbf{A} er en $n \times n$ -matrise med karakteristisk likning

$\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + c_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0$, vil matrisen \mathbf{A} tilfredsstille likningen

$$\mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + c_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} + \dots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

10. Rotasjonsmatriser

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

A roterer et objekt en vinkel θ rundt z-aksen (retning fra x til y)

B roterer et objekt en vinkel θ rundt y-aksen (retning fra z til x)

C roterer et objekt en vinkel θ rundt x-aksen (retning fra y til z)

11. Regneregler for determinanter

\mathbf{A} og \mathbf{B} $n \times n$ - matriser

- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$
- Determinanten skifter fortegn hvis to rekker (kolonner) bytter plass.
- Dersom rekkene (kolonnene) er lineært avhengige er determinanten = 0
- En felles faktor i en rekke eller kolonne kan settes utenfor.
(Konsekvens $\det k\mathbf{A} = k^n \det \mathbf{A}$)
- En determinant kan utvikles etter en vilkårlig rekke eller kolonne.
- Dersom en rekke eller kolonne er en sum med to ledd, kan determinanten spaltes opp. F eks. $\begin{vmatrix} a & b+c \\ d & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$
- Til en rekke (kolonne) kan adderes en konstant multiplisert med en annen rekke (kolonne) uten at determinanten forandrer verdi.
- Determinanten til en triangulær matrise er lik produktet av elementene på hoveddiagonalen.
- $\det(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$
 $\det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$
- $\det \mathbf{A} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ ikke-singulær

Diskret matematikk

1. Mengdelære

- a) **Kommutative lover:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- b) **Assosiative lover:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- c) **Distributive lover:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- d) **Identitetslovene:** $A \cup \emptyset = A$, $A \cap U = A$, U er grunnmengden
- e) **Komplementærlovene:** $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $\bar{\bar{A}} = A$, U er grunnmengden
- f) **de Morgan's lover:** $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

2. Logikk

- a) **Dobbel negasjon:** $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
- b) **Kommutative lover:** $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$, $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
- c) **Assosiative lover:** $[(p \vee q) \vee r] \Leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$, $[(p \wedge q) \wedge r] \Leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$
- d) **Distributive lover:** $[(p \vee (q \wedge r))] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$, $[(p \wedge (q \vee r))] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
- e) **de Morgans lover:** $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

3. Differenslikninger av 2. orden

Likningen $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$, der a og b er konstanter, har den generelle løsningen

- a) $u_n = Ap_1^n + Bp_2^n$ hvis $p^2 + ap + b = 0$ har to ulike reelle røtter p_1 og p_2
- b) $y = (A + Bn)p^n$ hvis $p^2 + ap + b = 0$ har dobbelroten p
- c) $u_n = r^n(A \cos n\theta + B \sin n\theta)$ hvis $p^2 + ap + b = 0$ har komplekse røtter $\alpha \pm i\beta$
Her er $r = |\alpha + i\beta|$ og $\theta = \arg(\alpha + i\beta)$

Rekker

1.

Aritmetisk rekke	$a_n = a_1 + (n-1)d$	d er rekkens differens
Summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke	$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$	
Geometrisk rekke, ledd n	$a_n = a_1 k^{n-1}$	k er rekkens kvotient
Summen av de n første leddene i en geometrisk rekke	$s_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k - 1}$	Gjelder for $k \neq 1$. Hvis $k=1$ er $s_n = na_1$
Summen av en konvergent geometrisk rekke	$s = \frac{a_1}{1 - k}$	Gjelder for $-1 < k < 1$ $S = 0$ når $a_1=0$
Rentesrenteformelen (sluttverdien)	$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$	Verdien K_n om n år av et beløp K_0 i dag
Nåverdi	$K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$	Verdien K_0 i dag svarer til et beløp K_n i dag

2. Konvergens

a) Forholdskriteriet:

Dersom $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k$, så er rekken $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergent hvis $k < 1$ og divergent hvis $k > 1$

3. Potensrekker

a) Taylorrekke: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$

b) Maclaurinrekke: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

c) Spesielle rekker:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{for } -1 < x \leq 1$$

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k \quad \text{for } -1 < x < 1, \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}$$

$$\binom{m}{0} = 1$$

4. Fourierrekker

a) Periodiske funksjoner

La $f(t)$ være en periodisk funksjon med periode $T = 2L$.

Fourier-rekken til f er en rekke på formen

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \text{ der } \omega = \frac{\pi}{L} \text{ og koeffisientene er gitt ved}$$

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

b) Funksjoner definert på $[0, L]$

$$\text{Cosinusrekke: } s_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \text{ der}$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) dt \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{Sinusrekke: } s_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \text{ der} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

c) Konvergens av Fourier-rekke

Fourier-rekken til $f(t)$ konvergerer mot

$$s(t) = \begin{cases} f(t) & \text{i punkter der } f \text{ er kontinuert} \\ \frac{1}{2}(f(t+) + f(t-)) & \text{i punkter der } f \text{ er diskontinuert} \end{cases}$$

d) Spesielle trigonometriske integraler

$$1 \quad \int x \cos ax dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$$

$$2 \quad \int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a}$$

$$3 \quad \int x^2 \cos ax dx = -2 \frac{\sin ax}{a^3} + 2 \frac{x \cos ax}{a^2} + \frac{x^2 \sin ax}{a}$$

$$4 \quad \int x^2 \sin ax dx = 2 \frac{\cos ax}{a^3} + 2 \frac{x \sin ax}{a^2} - \frac{x^2 \cos ax}{a}$$

$$5 \quad \int x^3 \cos ax dx = -6 \frac{\cos ax}{a^4} - 6 \frac{x \sin ax}{a^3} + 3 \frac{x^2 \cos ax}{a^2} + \frac{x^3 \sin ax}{a}$$

$$6 \quad \int x^3 \sin ax dx = -6 \frac{\sin ax}{a^4} + 6 \frac{x \cos ax}{a^3} + 3 \frac{x^2 \sin ax}{a^2} - \frac{x^3 \cos ax}{a}$$

Laplacetransformasjoner

1. Generelle transformasjonsregler

I	$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$	Definisjon
II	$L\{af(t) + bg(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{g(t)\} \quad a, b \text{ konstanter}$	Linearitet
III	$L\{f(kt)\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{s}{k}\right), F(s) = L\{f(t)\}$	Skalaendring
IVa	$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$	Transform av derivert
IVb	$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$	
IVc	$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	
IVd	$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{1}{s} L\{f(t)\}$	Transform sv integral
V	$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} L\{f(t)\}, n = 1, 2, 3, \dots$	Derivert av transform
VI	$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \text{ der } F(s) = L\{f(t)\}$	1.skiftsetning s-forskyvning
VIIa	$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} L\{f(t)\}, a > 0$	2.skiftsetning t-foskyvning
VIIb	$L\{f(t)u(t-a)\} = e^{-as} L\{f(t+a)\}, a > 0$	
VIIc	$L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = f(t-a)u(t-a) \text{ der } f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \text{ og } a > 0$	
VIIIa	$L\{(f * g)(t)\} = L\{f(t)\}L\{g(t)\} \quad \text{der } (f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$	Konvolusjon
VIIIb	$(f * g)(t) = L^{-1}\{L\{f(t)\}L\{g(t)\}\}$	

2. Spesielle transformasjoner

Tabell 2a

	$f(t)$	$F(s)$
1	1	$\frac{1}{s}$
2	t	$\frac{1}{s^2}$
3	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
6	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
8	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
9	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
10	$\delta(t-a)$	e^{-as}

Tabell 2b Inverstabell

	$F(s)$	$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, n=1,2,3,..$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
5	$\frac{1}{(s+a)^n}, n=1,2,3,..$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$
6	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}, a \neq b$	$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$
7	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}, a \neq b$	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$
8	$\frac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
9	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
10	$\frac{1}{s^2 - \alpha^2}$	$\frac{1}{\alpha} \sinh \alpha t$
11	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$	$\cosh \alpha t$
12	$\frac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
13	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$
14	$\frac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
15	$\frac{s^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\cos \omega t - \frac{1}{2}\omega t \sin \omega t$
16	$\frac{e^{-as}}{s}$	$u(t-a)$
17	e^{-as}	$\delta(t-a)$

Funksjoner av flere variable

1. 2.derivert-test

Klassifisering av kritiske punkter for funksjonen $f=f(x,y)$

Punktet (a, b) et kritisk punkt slik at $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b), \quad \Delta = AC - B^2$$

f har lokalt minimum i (a, b) når $\Delta > 0$ og $A > 0$.

f har lokalt maksimum i (a, b) når $\Delta > 0$ og $A < 0$.

f har sadelpunkt i (a, b) når $\Delta < 0$.

2. Lagrangelikningene

Ekstremalverdiene til funksjonen f skal finnes.

$$\begin{aligned} \text{a) 2 variable og 1 betingelse} & \quad \begin{cases} g(x,y) = 0 & (1) \\ \mathbf{grad} f = \lambda \mathbf{grad} g & (2,3) \end{cases} \\ \text{b) 3 variable og 1 betingelse} & \quad \begin{cases} g(x,y,z) = 0 & (1) \\ \mathbf{grad} f = \lambda \mathbf{grad} g & (2,3,4) \end{cases} \\ \text{c) 3 variable og 2 betingelser} & \quad \begin{cases} g(x,y,z) = 0, & (1) \\ h(x,y,z) = 0, & (2) \\ \mathbf{grad} f = \lambda \mathbf{grad} g + \mu \mathbf{grad} h & (3,4,5) \end{cases} \end{aligned}$$

3. Multiple integraler

a) **Dobbeltintegral fra kartesiske- til polarkoordinater:**

$$\iint_R f(x,y) dA = \iint_{R^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

b) **Trippelintegral fra kartesiske- til sylinderkoordinater:**

$$\iiint_T f(x,y,z) dV = \iint_D \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dz dA, \quad dA = r dr d\theta$$

4. **Areal av flaten S gitt ved $z = h(x, y), (x, y) \in D$:**

$$A = \iint_S dS = \iint_D \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} dA$$

Vektoranalyse

1. Divergens og curl til vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = \langle P, Q, R \rangle$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y + R_z, \quad \nabla \times \mathbf{F} = \langle R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y \rangle$$

2. Linjeintegral $\int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt$
 $C: \mathbf{r} = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle, \quad \alpha \leq t \leq \beta$

3. Green's teorem:

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R (Q_x - P_y) dA$$



4. Reduksjon av flateintegral til dobbeltintegral:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, h(x, y)) \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2} dA, \quad S: z = h(x, y), \quad (x, y) \in D$$

5. Enhetsnormaler på en flate S :

a) Når S er gitt ved $z = h(x, y)$: $\mathbf{n} = \pm \frac{\langle -h_x, -h_y, 1 \rangle}{\sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}}$

b) Når S er gitt ved $f(x, y, z) = 0$: $\mathbf{n} = \pm \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$

6. Reduksjon av fluksintegral til dobbeltintegral:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{\pm} dS = \iint_D \langle P, Q, R \rangle \Big|_{z=h(x,y)} \cdot \langle \mp h_x, \mp h_y, \pm 1 \rangle dA, \quad S: z = h(x, y), \quad (x, y) \in D$$

7. Divergensteoremet:

Legemet T avgrenses av flatene S_1, S_2, \dots, S_k med enhetsnormaler $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_k$ rettet ut av T .

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_2 dS + \dots + \iint_{S_k} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_k dS = \iiint_T \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

8. Stokes' teorem:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$



Lineære differensiallikninger av 1.&2. orden med konstante koeffisienter.

1. Homogene differensiallikninger:

$ay'' + by' + cy = 0, \quad y = y(x) \quad (1)$ <p>Karakteristisk likning:</p> $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2)$ <p>Løsning av karakteristisk likning:</p> $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad a \neq 0 \quad (3A)$ $\lambda = -\frac{c}{b}, \quad a = 0 \quad (3B)$	
---	--

	Type av løsning (3)	Basis til (1)	Generell løsning av (1)
I	λ_1, λ_2 relle eller komplekse	$\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$	$Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$
II	$b^2 - 4ac < 0$ $\lambda = -\frac{b}{2a} \pm i\omega$	$\{e^{-\frac{b}{2a}x} \cos(\omega x), e^{-\frac{b}{2a}x} \sin(\omega x)\}$	$e^{-\frac{b}{2a}x} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$
III	$b^2 - 4ac > 0, a \neq 0$ $\lambda = -\frac{b}{2a} \pm \alpha$	$\{e^{-\frac{b}{2a}x} \cosh(\alpha x), e^{-\frac{b}{2a}x} \sinh(\alpha x)\}$	$e^{-\frac{b}{2a}x} (A \cosh(\alpha x) + B \sinh(\alpha x))$
IV	$b^2 - 4ac = 0$ $\lambda = -\frac{b}{2a}$	$\{e^{-\frac{b}{2a}x}, xe^{-\frac{b}{2a}x}\}$	$(A + Bx)e^{-\frac{b}{2a}x}$
V	Når $a = 0$: $\lambda = -\frac{c}{b}$	$\{e^{-\frac{c}{b}x}\}$	$Ce^{-\frac{c}{b}x}$

$$\omega = \frac{1}{2a} \sqrt{4ac - b^2}, \quad \alpha = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}$$

2. Inhomogene differensiallikninger

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (4)$$

Løsning: $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ der $y_h(x)$ er generell løsning i homogen likning (1), mens $y_p(x)$ er partikulær løsning i inhomogen likning (4)

Sannsynlighetsregning og statistikk

1. Generelle formler i sannsynlighetsregningen

- a) Definisjon:
 P er et sannsynlighetsmål på utfallsrommet S hvis P oppfyller
- (i) $0 \leq P(A) \leq 1$ for alle delmengder (begivenheter) i S
 - (ii) $P(S) = 1$
 - (iii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ hvis A og B er **disjunkte** begivenheter
- b) Addisjonssetning $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- c) Komplementsetningen $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- d) Betinget sannsynlighet $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
- e) Multiplikasjonssetningen $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
- f) Uavhengighet : A og B er uavhengige hvis $P(A|B) = P(A)$ Dette medfører også at $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- g) Total sannsynlighet : $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})$
- h) Bayes lov : $P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$

2. Setninger om forventning og varians for stokastiske variable

- a) La X_1, X_2, \dots, X_n være stokastiske variable og a_1, a_2, \dots, a_n, b være konstanter
- (i) Da er $E(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n + b) = a_1E(X_1) + a_2E(X_2) + \dots + a_nE(X_n) + b$
 - (ii) Hvis X_1, X_2, \dots, X_n er uavhengige er

$$Var(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n + b) = a_1^2Var(X_1) + a_2^2Var(X_2) + \dots + a_n^2Var(X_n)$$
- b) Spesialtilfelle av a) : Hvis X_1, X_2, \dots, X_n er uavhengige stokastiske variable og alle har samme forventning μ og samme varians σ^2 vil $E(\bar{X}) = \mu$ og
- $$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{der} \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

3. Diskrete sannsynlighetsfordelinger

a) Binomisk fordeling

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

$$E(X) = np \quad \text{Var}(X) = np(1-p)$$

b) Hypergeometrisk fordeling

$$P(X = x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = np \quad \text{Var}(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p) \quad \text{der } p = \frac{M}{N}$$

c) Poissonsfordeling

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

4. Kontinuerlige fordelinger

a) Normalfordelingen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$E(X) = \mu \quad \text{Var}(X) = \sigma^2$$

b) Eksponensialfordeling

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \quad \lambda > 0 \text{ konstant}$$

c) Rektangelfordeling

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad x \in [a, b]$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

5. Sentralgrenseteoremet

Dersom X_1, X_2, \dots, X_n er uavhengige identisk fordelte stokastiske variable med forventning μ

og standardavvik σ er $\sum_{i=1}^n X_i$ tilnærmet normalfordelt $N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ når n er stor

og $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ er tilnærmet normalfordelt $N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ når n er stor

6. Estimering av p i binomisk fordeling.

Punktestimator $\hat{p} = \frac{X}{n}$, $E(\hat{p}) = p$, $Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$

For store verdier av n har vi : (i følge sentralgrenseteoremet)

Tilnærmet konfidensintervall: $I = \left[\hat{p} - u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$

Hypotesetesting: Testvariabel: $\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ er tilnærmet

standardnormalfordelt under $H_0: p = p_0$ for store verdier av n ($np_0 > 10$)

7. Intervallestimering av μ og σ

(formlene er eksakte for normalfordeling, tilnærmet riktige for andre fordelinger når n stor (i følge sentralgrenseteoremet))

$I = \left[\bar{x} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$	Konfidensintervall for μ når σ er kjent
$I = \left[\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$	Konfidensintervall for μ når σ er ukjent
$I = \left[0, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}}} \right]$	Ensidig konfidensintervall for σ
$I = \left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}} \right]$	Tosidig konfidensintervall for σ
$I = \left[\bar{x} - \bar{y} - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{x} - \bar{y} + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$	Konfidensintervall for $\mu_1 - \mu_2$ når σ_1 og σ_2 er kjente
$I: \left[\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\frac{\alpha}{2}, (n_1+n_2-2)} \cdot s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right]$	Konfidensintervall for $\mu_1 - \mu_2$ når σ_1 og σ_2 er ukjente men like ($= \sigma$) og σ estimeres med $s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{(n_1+n_2-2)}}$
$I = \left[\bar{x} - \bar{y} - t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} \frac{s_z}{\sqrt{n}}, \bar{x} - \bar{y} + t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} \frac{s_z}{\sqrt{n}} \right]$	Konfidensintervall for $\Delta = \mu_1 - \mu_2$ når vi har observasjoner gitt i par ($Z_i = X_i - Y_i$)

8. Testing av hypoteser om forventninger .

(formlene er eksakte for normalfordeling, tilnærmet riktige for andre fordelinger når n stor (i følge sentralgrenseteoremet))

Ett utvalg		Betegnelse på test, Testobservator med sannsynlighetsfordeling
a) σ kjent $H_0: \mu = \mu_0$ H_1 : ulike alternativ		u -test , $U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ som er $N(0,1)$ eller \bar{X} som er $N(\mu_0, \sigma)$ under H_0
b) σ ukjent, $H_0: \mu = \mu_0$ H_1 : ulike alternativ		t -test, $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$ som er t -fordelt med $n-1$ frihetsgrader under H_0
To utvalg		
a) σ_1 og σ_2 kjente $H_0: \mu_1 = \mu_2$ H_1 : ulike alternativ		Toutvalgs u - test, $U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ som er normalfordelt $N(0,1)$ under H_0
b) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ ukjent, $H_0: \mu_1 = \mu_2$ H_1 : ulike alternativ		Toutvalgs t - test, $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$ som er t -fordelt med $n_1 + n_2 - 2$ frihetsgrader under H_0 der $S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$
Flere utvalg		
Enveis variansanalyse (F-test)		
$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_k = \sigma$, ukjent $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_k$ H_1 : minst en av μ -ene er ulik de andre		Forkast H_0 hvis $F > f_{k-1, n-k}$ $F = \frac{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k n_i (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{X}_{ij} - \bar{X}_i)^2} = \frac{\frac{1}{k-1} ((n-1)S^2 - \sum_{i=1}^k (n_i - 1)S_i^2)}{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1)S_i^2}$ er Fisherfordelt (F-fordelt) med $k-1$ og $n-k$ frihetsgrader under H_0 ($n = \sum_{i=1}^k n_i$)

9. Samvariasjon

Empirisk kovarians	$S_{XY} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i$
Empirisk korrelasjon	$R = \frac{S_{XY}}{S_x S_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})Y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$

10. Regresjonsanalyse

Parameter	Punktestimator	Testvariabel	Intervallestimator
β	$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})Y_i}{M}$	$T = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\hat{\sigma}} \sqrt{M}$	$I = [\hat{\beta} - t_{\frac{\alpha}{2}, (n-2)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{M}}, \hat{\beta} + t_{\frac{\alpha}{2}, (n-2)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{M}}]$
α	$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta} \bar{x}$		
σ	$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{Q(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{n-2}}$		

T er Student- t - fordelt med $n-2$ frihetsgrader hvis H_0 er riktig (dvs. hvis $\beta = \beta_0$)

$$M = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$Q(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \sum_{i=1}^n (Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} x_i))^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 - (\hat{\beta})^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$