SOE 313

HØGSKOLEN I BERGEN
Avdeling for ingeniørutdanning

EKSAMEN I SOE313 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

KLASSE	:	3EC, (valgfag for 3EB)
DATO	:	august 2000

ANTALL OPPGAVER	: 3
ANTALL SIDER	: 3
VEDLEGG	: 3 sider formelsamling.
HJELPEMIDLER	: Kalkulator, type II
TID	: 9.00 - 14.00
SENSOR	: Bjørn Askeland
FAGLÆRER	: Terje M. Natås
MERKNADER	:

Postboks 7030, 5020 Bergen. Tlf. 55 58 75 00, Fax 55 58 77 90
Besøksadr.: Nygårdsgt. 112, Bergen

Les dette først:
Innenfor de rammer oppgaven setter, skal du bruke enklest mulig metode, og komme fram til enklest mulig svar. Ta bare med i besvarelsen det du mener er relevant for å besvare oppgaven. I teoribesvarelser legges det vekt på at besvarelsen viser at en har en helhetlig forståelse av stoffet.

Lykke til!

Oppgave 1

a) Hva menes med et stimulus signal?
Nevn 2 prinipielt forskjellige stimuli signaler.

Hva menes med frekvensrespons?
Beskriv 2 måter for å måle frekvensresponsen.

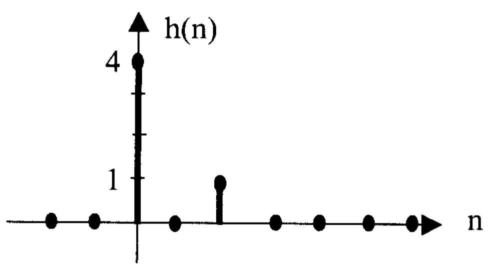
b) Gitt eksponentialfunksjonene $y_1(t) = Ae^{2\pi f_1 t}$ og $y_2(t) = Ae^{j2\pi f_1 t}$
Skisser begge funksjonene som vektorer i det komplekse plan
når A = 2 , f_1 = 125 Hz og t = 1ms.
Forklar hvordan disse vektorene beveger seg når t øker.

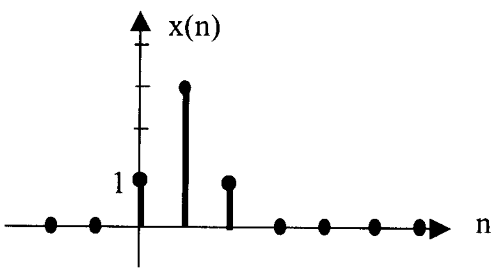
c) Et cosinussignal på 10 KHz og uten faseforskyvning, samples med samplingsfrekvens på 40 KHz. Første sample er i t = 0.
Beregn en 4 punkters Diskret Fourier Transformerte (DFT) til signalet når

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

Tegn grafen til signalets DFT. Forklar grafens utslag ved de ulike posisjoner.

d) Anta impulsrepons og innsignal til et system er gitt av følgende grafer:





Beregn utsekvensen y(n) fra systemet i tidsplanet, og tegn grafen til y(n).

Oppgave 2

a) Et signal *x(t)* har spekter $X(f)=\begin{cases}\cos(2\pi T_1 f) & \text{for } -\frac{f_1}{4}<f<\frac{f_1}{4}\\ 0 & \text{ellers}\end{cases}$ der $f_1=\frac{1}{T_1}$.

Skisser *X(f)*.

Nevn og begrunn 2 egenskaper som x(t) må oppfylle for at x(t) skal ha et spekter som oppgitt.

b) Signalet *x(t)* samples med samplingsfrekvens f_s og kalles $x_s(t)$.
Spekteret til $x_s(t)$ kalles $X_s(f)$.
Skisser $\frac{X_s(f)}{\tau}$ for $f_s = 1000\text{Hz} = \frac{f_1}{2}$. Hva er spekterets største verdi?

c) Forklar hva som skjer med spekteret $X_s(f)$ hvis f_s økes og hvis f_s reduseres?
Hvordan påvirker disse endringene i samplingsfrekvensen mulighetene til å gjenvinne det opprinnelige signalet x(t)

d) Hva skjer med forsterkning og fase til det opprinnelige spekteret *X(f)*, hvis $x(t)$ forsinkes en tid ΔT?
Et signal y(t) består av x(t) forsinket en tid ΔT pluss x(t) framskyndet en tid ΔT.
Beregn spekteret Y(f) uttrykt med f, X(f) og ΔT.

Oppgave 3

a) Gitt en kausal sekvens $x(n) = 1{,}333^{-n}$
Skisser sekvensen.
Beregn den Z-transformerte til *x(n)*.

b) Et digitalt filter har impulsrespons $h(n) = \delta(n) - \alpha \cdot \delta(n-1)$
Finn et uttrykk for transferfunksjonen for filteret.
Tegn pol/nullpunkt diagram for $\alpha = 0{,}5$.

c) Sekvensen i punkt a) sendes inn på filteret i punkt b) og gir responsen *y(n)*
Finn et uttrykk for den Z-transformerte til *y(n)*.

d) Finn et uttrykk for *y(n)* ut fra den Z-transformerte til *y(n)*
Regn ut verdiene y(0), y(1) og y(2)

Formelsamling i SOE313 Digital signalbehandling. Høsten 1999

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\quad\quad$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\quad\quad$ $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos\phi = \frac{e^{j\phi}+e^{-j\phi}}{2}$ $\quad$ $\sin\phi = \frac{e^{j\phi}-e^{-j\phi}}{2j}$ $\quad$ $Sinc(p) = \frac{\sin(\pi p)}{\pi p}$

<u>Samplingsintegralet</u>: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$ $\quad$ <u>Periodisk utvidelse</u>: $x_{pu}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t-iT)$

<u>Foldning</u> av kausale signaler (tidskontinuerlig og tidsdiskret):

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$$

<u>Fourier-rekke</u> utvidelse av signal med periode $T=1/f_1$:

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi m f_1 t} \quad \text{der} \quad c_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j2\pi m f_1 t}dt \quad \text{og} \quad c_m = c_{-m}^*$$

<u>Laplacetransformasjon.</u> $\quad \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

<u>Ideell rekonstruksjon</u> ved hjelp av Shannons interpolator $h(t) = sinc(f_s t)$:

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(iT_s)h(t-iT_s)$$

<u>Diskret Fourier transformert</u> til sekvensen x(n) der n = 0,1 .. N-1:

$$\mathcal{D}[x(n)] = X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{mn} \quad \text{for } m = 0 .. N\text{-}1$$

<u>Invers diskret Fouriertransformert</u> til sekvensen X(m) der m = 0,1 .. N-1:

$$x(n) = \mathcal{D}^{-1}[X(m)] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)W^{-mn} \quad \text{for } n = 0,1 \ldots N\text{-}1$$

<u>Generell differenslikning</u> av grad N: $\quad \sum_{i=0}^{N} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i) \quad$ der $b_0=1$

Kausal <u>sekvens uttrykt ved Kronecker impulser</u>: $x(n) = \sum_0^{\infty} x(i)\delta(n\text{-}i)$

<u>Frekvensrespons</u> lavpass lineær fase FIR-filter:

$$H(f) = \left(a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i \cdot \cos\left(2\pi(M-i)\frac{f}{f_s}\right)\right)\cdot e^{-j2\pi M\frac{f}{f_s}} \quad \text{der } M = \frac{N-1}{2} \text{ og N er filterets grad.}$$

Lavpass lineær fase FIR-filter med -6 dB forsterkning ved f_a og samplingsfrekvens f_s:

$a_i = c_{i-M} = c_m = c_{-m}$ $\quad$ for i = 0,1,2....2M $\quad$ der 2M = N-1

$c_m = c_0 \cdot Sinc\left(2m\frac{f_a}{f_s}\right)$ $\quad$ for m = 1,2…M og der $c_0 = \frac{2f_a}{f_s}$

Regel	Tidsfunksjon f(t) $= \mathcal{F}^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df$	Fouriertransformert *F(f)* $= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$
F1: Linearitetsregelen	$af_1(t) + bf_2(t)$ Generelt: $\sum_i a_i f_i(t)$	$aF_1(f) + bF_2(f)$ Generelt: $\sum_i a_i \mathcal{F}[f_i(t)]$
F2: Tidsforskyvningsregelen	$f(t - t_0)$	$F(f) e^{-j2\pi f t_0}$
F3: Frekvensforskyvnings-regelen	$f(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$F(f - f_0)$
F4: Amplitudemodulasjon av cosinus bærebølge	$f(t)\cos(2\pi f t)$	$\frac{1}{2}F(f - f_0) + \frac{1}{2}F(f + f_0)$
F5: Foldning i tidsplanet	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(f) \cdot F_2(f)$
F6: Foldning i frekvensplanet	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(f) * F_2(f)$
F7: Derivasjon	$\frac{df(t)}{dt}$	$j2\pi f\ F(f)$
F8: Integrasjon	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{F(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} F(0)\delta(f)$

Grunleggende Fouriertransformasjonsregler

Tidsfunksjon f(t)	**Beskrivelse av tidsfunksjonen**	**Fouriertransformert $\mathcal{F}$[f(t)]**
$\delta(t)$	Impuls	1
$\delta(t - t_0)$	Forskjøvet impuls	$e^{-j2\pi f t_0}$
1	Konstant lik 1	$\delta(f)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	Kompleks eksponentialfunksjon	$\delta(f - f_0)$
r(t)	Rektangulær tidsymmetrisk puls med bredde τ	$\tau\, sinc(\tau f)$
$u(t) \cdot e^{-at}$	Kausal og reell eksponetialfunksjon	$\frac{1}{(a + j2\pi f)}$
$\cos(2\pi f_0 t)$	Cosinussignal	$\frac{1}{2}\left(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	Sinussignal	$\frac{1}{2j}\left(\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)\right)$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi m f_1 t}$	Generelt periodisk signal gitt ved Fourierkoeffisientene	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \delta(f - mf_1)$
$\tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_s)\delta(t - iT_s)$	Samplet signal $x_s(t)$	$\tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_s) e^{-j2\pi f i T_s} = \frac{\tau}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi m f_s t}$	Enhets impulstog med periode $T_s = 1/f_s$	$f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n T_s f}$

Viktige Fouriertransformasjonspar

Regel	Tidsfunksjon x(n)	Z-transformert $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}$
Z1: Linearitetsregelen	$ax_1(n) + bx_2(n)$ Generelt: $\sum_i a_i x_i(n)$	$aX_1(z) + bX_2(z)$ Generelt: $\sum_i a_i \mathcal{Z}[x_i(n)]$
Z2: Tidsforskyvningsregelen	$x(n-m)$	$z^{-m} X(z)$
F3: Radiell skalering i z-planet	$x(n) a^{-n}$	$X(az)$
F4: Rotasjonskalering i z-planet (feil i boka)	$x(n) e^{-j\omega T n}$	$X(e^{j\omega T} z)$
F5: Foldning i tidsplanet gir multiplikasjon i frekvensplanet.	$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z) \cdot X_2(z)$

Grunnregler for Z-transformasjon

Tidsfunksjon x(n)	**Beskrivelse av tidsfunksjonen**	**Z-transformert $\mathcal{Z}$[x(n)]**
Aperiodiske tidssignaler		
δ(n)	Impuls	1
u(n)	Enhetsprang	$\frac{z}{z-1}$
n · u(n)	Rampe	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$a^n \cdot$ u(n)	Eksponential funksjon	$\frac{z}{z-a}$
$e^{s_0 T n} \cdot$ u(n)		$\frac{z}{z-e^{s_0 T}}$
sin($\omega_0 n T$) · u(n)	Sinussi gnal	$\frac{\sin(\omega_0 T) \cdot z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T) \cdot z + 1}$
cos($\omega_0 n T$) · u(n)	Cosinussignal	$\frac{z^2 - \cos(\omega_0 T) \cdot z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T) \cdot z + 1}$
$e^{-anT} \cdot$ sin($\omega_0 n T$) · u(n)	Dempet sinus	$\frac{e^{-aT} \cdot \sin(\omega_0 T) \cdot z}{z^2 - 2e^{-aT} \cos(\omega_0 T) \cdot z + e^{-2aT}}$

Viktige Z-transformasjonspar for kausale sekvenser (multiplikasjon med u(t) gir kausalt signal)

Terje M. Natås

SOE 313

HØGSKOLEN I BERGEN
Avdeling for ingeniørutdanning

EKSAMEN I SOE313 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

KLASSE	:	3EC, (valgfag for 3EB)
DATO	:	17. desember 1999

ANTALL OPPGAVER	: 3
ANTALL SIDER	: 4
VEDLEGG	: 3 sider formelsamling.
HJELPEMIDLER	: Kalkulator, type II
TID	: 9.00 - 14.00
SENSOR	: Bjørn Askeland
FAGLÆRER	: Terje M. Natås
MERKNADER	:

Postboks 7030, 5020 Bergen. Tlf. 55 58 75 00, Fax 55 58 77 90
Besøksadr.: Nygårdsgt. 112, Bergen

Les dette først:
Innenfor de rammer oppgaven setter, skal du bruke enklest mulig metode, og komme fram til enklest mulig svar. Ta bare med i besvarelsen det du mener er relevant for å besvare oppgaven. I teoribesvarelser legges det vekt på at besvarelsen viser at en har en helhetlig forståelse av stoffet.

Lykke til!

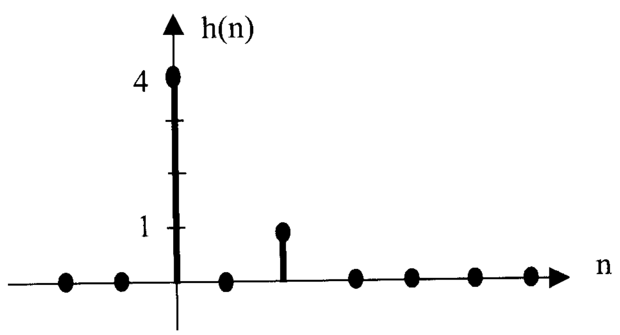
Oppgave 1

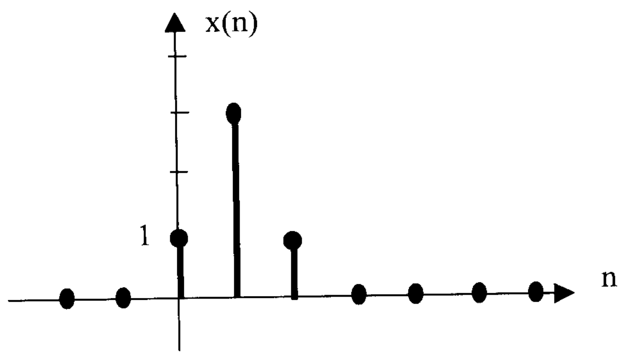
a) Forklar begrepene
- homogenitetsprinsippet
- superposisjonsprinsippet
- kausalt system
- tidsinvariant system
- impulsrepons

b) En generell kausal sekvens kan skrives:
$x(n) = x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2) + x(3)\delta(n-3) \;\; \ldots$
Denne sekvensen sendes inn på et kausalt, lineært og tidsinvariant system (toport) med impulsrespons h(n).

Bevis foldningssetningen $y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i)h(n-i)$ ved å gjøre bruk av begrepene i punkt a.

c) Anta impulsrepons og innsignal er gitt av følgende grafer:





Beregn utsekvensen y(n) og tegn grafen til y(n).

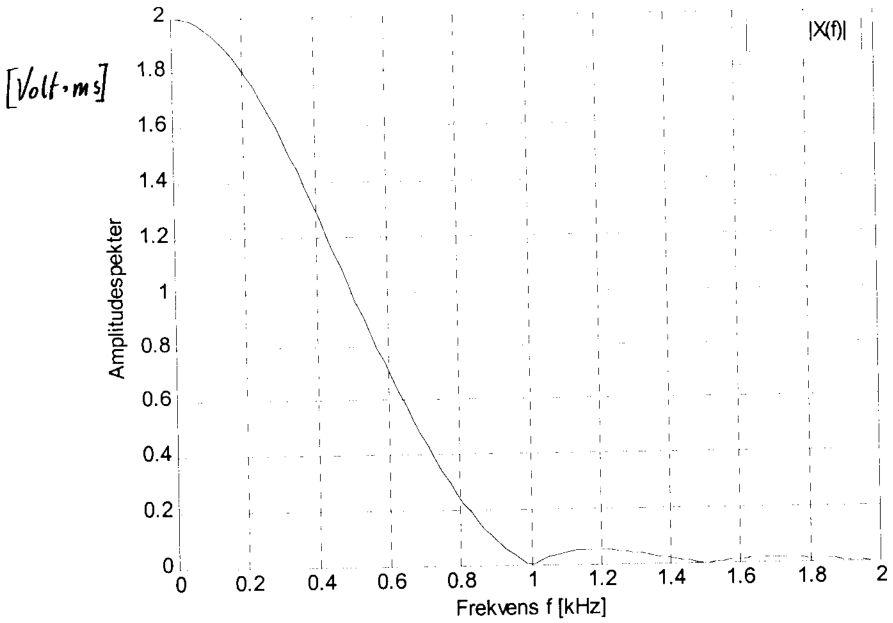
d) Finn transferfunksjonen H(z) til systemet i punkt c. Bestem poler og nullpunkt.
Er systemet stabilt? Begrunn svaret.

Oppgave 2

Et signal x(t) er definert som: $x(t) = \begin{cases} 1-\cos(2\pi f_1 t) & \text{for } 0 < t < T_1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$ [Volt]

der $f_1 = \dfrac{1}{T_1} = 0{,}5$ KHz .

Signalets amplitudespekter $|X(f)| = |\mathcal{F}[x(t)]|$ er gitt av grafen:



a) Vi sampler x(t) med samplingsfrekvens 1.5 KHz.
Skissér amplitudespekteret $\left|\dfrac{X_s(f)}{\tau}\right|$ i området $0 \leq f \leq 2$ KHz .
Angi amplitudespekterets verdi ved $f = 0$.

b) Regn ut signalets DFT (Diskret Fourier Transformert) basert på kun 3 samplingsverdier når vi bruker samplingsfrekvens lik 1,5 KHz. Den første samplingen er ved t=0.

Forklar hvordan DFTens tallverdi også kan finnes fra den oppgitte grafen til X(f).

c) Beregn Fourierkoeffisientene til det periodiske signalet $y(t) = 1 - \cos(2\pi f_1 t)$
Forklar hvordan også disse kan avledes fra den opprinnelige grafen til X(f).

d) Drøft problemene med aliasering i situasjoner som i punkt a.
Hvorfor påvirker ikke aliasering beregningene i punkt b og c.

Oppgave 3

a) Tegn amplitude og fasespekter gitt av den Fouriertransformerte til signalet

$x(t) = \sin(2\pi f_1 t)$ der f_1= 1 KHz

Signalet blir videre samplet med samplingsfrekvens f_s= 8 KHz. Vi får da $x_s(t)$

Skriv uttrykket for spekteret $\frac{\mathcal{F}[x_s(t)]}{\tau}$ til dette samplede signalet.

Tegn amplitude og fasespekter for det samplede signalet fra - 10 til +10 KHz.

b) Vi har samme signal x(t) som i punkt a, men samplingsfrekvensen reduseres til 1,9 KHz.
Vi finner det rekonstruerte signalet $x_{rek}(t)$ ved å filtrere det samplede signalet med et ideelt lavpassfilter med knekkfrekvens på 2 KHz og forsterkning $1/\tau$.
Tegn resulterende amplitude og fasespekter $\mathcal{F}[x_{rek}(t)]$ mellom -2 KHz og +2KHz.

c) Skriv opp matematisk uttrykk for $x_{rek}(t)$ og lag en skisse som grovt viser tidsforløpet til $x_{rek}(t)$ sammenliknet med det opprinnelige signalet x(t).
Hva er årsaken til eventuelle uoverensstemmelser mellom $x_{rek}(t)$ og x(t) ?

d) En periode av sinussignalet i punkt a samples med samplingsfrekvens på 8 KHz.
Signalet digitaliseres og lagres under navnet $y(nT_s)$ i 8 påfølgende lagersteder i en datamaskin. Vi ønsker å dobble antall "samplingsverdier" ved å foreta interpolasjon mellom de registrerte samplingsverdiene. Interpolasjonen foretas med "Shannons interpolator". Det utvidede signalet virker da som om det er samplet med samplingsperioden T_p. Vi kaller dette signalet for $y(pT_p)$ der $T_p=T_s/2$.

Skriv opp formelen for beregningen av $y(pT_p)$ ut fra de 8 opprinnelige verdiene.
Hva er hensikten med å foreta den interne interpolasjonsoperasjonen?

Formelsamling i SOE313 Digital signalbehandling. Høsten 1999

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\qquad$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\qquad$ $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$\cos\phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}$ $\qquad$ $\sin\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$ $\qquad$ $Sinc(p) = \frac{\sin(\pi p)}{\pi p}$

Samplingsintegralet: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$ $\qquad$ Periodisk utvidelse: $x_{pu}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(t-iT)$

Foldning av kausale signaler (tidskontinuerlig og tidsdiskret):

$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ $\qquad$ $y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)x(n-m)$

Fourier-rekke utvidelse av signal med periode $T=1/f_1$:

$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi m f_1 t}$ der $c_m = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-j2\pi m f_1 t}dt$ og $c_m = c_{-m}^{*}$

Laplacetransformasjon. $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

Ideell rekonstruksjon ved hjelp av Shannons interpolator $h(t) = sinc(f_s t)$:

$$y(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(iT_s)h(t-iT_s)$$

Diskret Fourier transformert til sekvensen x(n) der n = 0,1 .. N-1:

$$\mathcal{D}[x(n)] = X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{mn} \quad \text{for } m = 0 .. N\text{-}1$$

Invers diskret Fouriertransformert til sekvensen X(m) der m = 0,1 .. N-1:

$$x(n) = \mathcal{D}^{-1}[X(m)] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)e^{j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X(m)W^{-mn} \quad \text{for } n = 0,1 \ldots N\text{-}1$$

Generell differenslikning av grad N: $\sum_{i=0}^{N} b_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{N} a_i x(n-i)$ der $b_0=1$

Kausal sekvens uttrykt ved Kronecker impulser: $x(n) = \sum_0^{\infty} x(i)\delta(n-i)$

Frekvensrespons lavpass lineær fase FIR-filter:

$$H(f) = \left(a_M + \sum_{i=0}^{M-1} 2a_i \cdot \cos\left(2\pi(M-i)\frac{f}{f_s}\right)\right)\cdot e^{-j2\pi M\frac{f}{f_s}} \quad \text{der } M = \frac{N-1}{2} \text{ og N er filterets grad.}$$

Lavpass lineær fase FIR-filter med -6 dB forsterkning ved f_a og samplingsfrekvens f_s:

$a_i = c_{i-M} = c_m = c_{-m}$ $\qquad$ for i = 0,1,2....2M $\qquad$ der 2M = N-1

$c_m = c_0 \cdot Sinc\left(2m\frac{f_a}{f_s}\right)$ for m = 1,2...M og der $c_0 = \frac{2f_a}{f_s}$

Regel	Tidsfunksjon f(t) $= \mathcal{F}^{-1}[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{j2\pi ft} df$	Fouriertransformert $F(f)$ $= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ft} dt$
F1: Linearitetsregelen	$af_1(t) + bf_2(t)$ Generelt: $\sum_i a_i f_i(t)$	$aF_1(f) + bF_2(f)$ Generelt: $\sum_i a_i \mathcal{F}[f_i(t)]$
F2: Tidsforskyvningsregelen	$f(t-t_0)$	$F(f) e^{-j2\pi f t_0}$
F3: Frekvensforskyvnings-regelen	$f(t) e^{j2\pi f_0 t}$	$F(f-f_0)$
F4: Amplitudemodulasjon av cosinus bærebølge	$f(t)\cos(2\pi f t)$	$\frac{1}{2}F(f-f_0) + \frac{1}{2}F(f+f_0)$
F5: Foldning i tidsplanet	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(f) \cdot F_2(f)$
F6: Foldning i frekvensplanet	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(f) * F_2(f)$
F7: Derivasjon	$\frac{df(t)}{dt}$	$j2\pi f \; F(f)$
F8: Integrasjon	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\frac{F(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2} F(0)\delta(f)$

Grunleggende Fouriertransformasjonsregler

Tidsfunksjon f(t)	**Beskrivelse av tidsfunksjonen**	**Fouriertransformert $\mathcal{F}$[f(t)]**
$\delta(t)$	Impuls	1
$\delta(t-t_0)$	Forskjøvet impuls	$e^{-j2\pi f t_0}$
1	Konstant lik 1	$\delta(f)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	Kompleks eksponentialfunksjon	$\delta(f-f_0)$
r(t)	Rektangulær tidsymmetrisk puls med bredde τ	$\tau \, sinc(\tau f)$
$u(t) \cdot e^{-at}$	Kausal og reell eksponetialfunksjon	$\frac{1}{(a + j2\pi f)}$
$\cos(2\pi f_0 t)$	Cosinussignal	$\frac{1}{2}\left(\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\right)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	Sinussignal	$\frac{1}{2j}\left(\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)\right)$
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi m f_1 t}$	Generelt periodisk signal gitt ved Fourierkoeffisientene	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \delta(f - mf_1)$
$\tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_s)\delta(t-iT_s)$	Samplet signal $x_s(t)$	$\tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT_s) e^{-j2\pi f i T_s} = \frac{\tau}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(f - mf_s)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT_s) = f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi m f_s t}$	Enhets impulstog med periode Ts=1/fs	$f_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi n T_s f}$

Viktige Fouriertransformasjonspar

Regel	Tidsfunksjon x(n)	Z-transformert $H(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$
Z1: Linearitetsregelen	$ax_1(n)+bx_2(n)$ Generelt: $\sum_i a_i x_i(n)$	$aX_1(z)+bX_2(z)$ Generelt: $\sum_i a_i Z[x_i(n)]$
Z2: Tidsforskyvningsregelen	$x(n-m)$	$z^{-m}X(z)$
F3: Radiell skalering i z-planet	$x(n)a^{-n}$	$X(az)$
F4: Rotasjonskalering i z-planet (feil i boka)	$x(n)e^{-j\omega Tn}$	$X(e^{j\omega T}z)$
F5: Foldning i tidsplanet gir multiplikasjon i frekvensplanet.	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1(z)\cdot X_2(z)$

Grunnregler for Z-transformasjon

Tidsfunksjon x(n)	**Beskrivelse av tidsfunksjonen**	**Z-transformert H[x(n)]**
Aperiodiske tidssignaler		
δ(n)	Impuls	1
u(n)	Enhetsprang	$\frac{z}{z-1}$
n	Rampe	$\frac{z}{(z-1)^2}$
a^n	Eksponential funksjon	$\frac{z}{z-a}$
e^{s_0Tn}		$\frac{z}{z-e^{s_0T}}$
$\sin(\omega_0 nT)$	Sinussignal	$\frac{\sin(\omega_0T)\cdot z}{z^2-2\cos(\omega_0T)\cdot z+1}$
$\cos(\omega_0 nT)$	Cosinussignal	$\frac{z^2-\cos(\omega_0T)\cdot z}{z^2-2\cos(\omega_0T)\cdot z+1}$
$e^{-anT}\cdot\sin(\omega_0 nT)$	Dempet sinus	$\frac{e^{-aT}\cdot\sin(\omega_0T)\cdot z}{z^2-2e^{-aT}\cos(\omega_0T)\cdot z+e^{-2aT}}$

Viktige Z-transformasjonspar for kausale sekvenser

Terje M. Natås

SOE 313

HØGSKOLEN I BERGEN
Avdeling for ingeniørutdanning

EKSAMEN I SOE313 DIGITAL SIGNALBEHANDLING

KLASSE : 3EC
DATO : 11. august 1999

ANTALL OPPGAVER : 3
ANTALL SIDER : 3
VEDLEGG : 0

HJELPEMIDLER: Enkel kalkulator.
Lærebok: Natås/Hüche,
"Digital signalbehandling for ingeniører" 1998
(3 kompendier m/ gulbrun forside)

TID : 9.00 - 14.00

SENSOR : Bjørn Askeland
FAGLÆRER : Terje M. Natås

MERKNADER :

Postboks 7030, 5020 Bergen. Tlf. 55 58 75 00, Fax 55 58 77 90
Besøksadr.: Nygårdsgt. 112, Bergen

Les dette først:
Innenfor de rammer oppgaven setter, skal du bruke enklest mulig metode, og komme fram til enklest mulig svar. Ta bare med i besvarelsen det du mener er relevant for å besvare oppgaven. I teoribesvarelser legges det vekt på at besvarelsen viser at en har en helhetlig forståelse av stoffet. Dette poengteres siden læreboka er tillatt hjelpemiddel.

Lykke til!

Oppgave 1

a) Den enkleste formen for digitalt lavpassfiltrering er å foreta en glidende midling, på engelsk kalt "moving average". I det etterfølgende brukes glidende midling over 6 målinger. Dette skjer ved at et filtreringsprogram i datamaskinen hele tiden summerer sist målte verdi x(n), med de 5 forrige som en har mellomlagret i RAM. Ny filtrert verdi y(n), blir da summen av disse 6 måleverdiene dividert med 6.
- Skriv differenslikningen for et filter basert på denne beskrivelsen.
- Tegn realisasjonsstuktur for filteret direkte ut fra differenslikningen.
- Hva kalles filtertypen og hvilken grad har filteret ?

b) Det samme filter kan konstrueres ut fra et annen tankegang:
Ny middelverdi er den gamle middelverdien pluss ny måleverdi dividert på 6, minus den eldste måleverdien dividert på 6 (den som skyves ut av den nye målingen).
- Skriv differenslikningen for et filter basert på denne beskrivelsen.
- Tegn realisasjonsstuktur på direkte type 1 form basert på differenslikningen.
- Hva kalles filtertypen, og hvilken grad har filteret?

c) Vis at transferfunksjonen H(z) til filtrene i punkt a og b kan skrives på samme form, og at filtrene dermed er identiske.

d) Vis at glidende middel filteret har en forsterkning som kan skrives på formen:

$$|H(f)| = \frac{1}{6}\left|\frac{sin\left(\frac{6\pi f}{f_s}\right)}{sin\left(\frac{\pi f}{f_s}\right)}\right|$$

Vis også at fasen er lineær.

Oppgave 2

a) I filterdesign ved hjelp av bilineær transformasjon brukes ofte "prewarping". Hva er hensikten med "prewarping" og når brukes denne teknikken?

b) Når et analogt lavpassfilter transformeres til et digitalt lavpassfilter ved hjelp av bilineær transformasjon, vil en normalt ikke få aliaseringsproblemer. Vis dette med utgangspunkt i et 2. ordens normert Butterworth lavpassfilter $H(s_N)$.

c) Et 2. ordens analogt Butterworth lavpassfilter har 3 dB dempning ved 9 KHz. Filteret skal transformeres hjelp av bilineær transformasjon til å bli et digitalt lavpassfilter. Samplingsfrekvensen er 24 KHz. Finn transferfunksjonen H(z) for filteret.

d) Beregn frekvensen der det digitale filteret i punkt c har 3dB dempning.

Oppgave 3

a) Drøft, uavhengig av hvilket signal vi har, hvilken grunnleggende informasjon signalets spekter på polar form, gir. Utdyp hvilken informasjon et ensidig komplekst spekter gir i forhold til hvilken informasjon et tosidig komplekst spekter gir. Hvordan er sammenhengen mellom informasjonen fra de to spektertypene. (Formler og beregninger kreves ikke for punkt a, men det er viktig å få fram en helhetlig forståelse uttrykt med egne ord) .

b) Spekterberegning kan utføres på ulike måter. I hvilke situasjoner beregnes spekter ved hjelp av:
- Fourier-rekker?
- Fourier-transformasjon?
- Laplacetransformasjon?
- Z-transformasjon?
- Diskret Fourier Transformasjon?
- Fast Fourier transformasjon?

c) Et signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ med periode $T_0 = \frac{1}{f_0}$, samples over tidsrommet T_0 med samplingsfrekvens $4f_0$. Første sampling skjer ved tidspunkt t = 0.
- Beregn signalets DFT.
- Tegn grafen X(mF) som funksjon av frekvensen f. Forklar alle spektralverdiene og ta med i forklaringen sammenhengen med Fourierkoeffisientene til x(t).